Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	Cours Notions de fonctions	Niveau : 3éme_Collège Année : 2023-2024

1 Définition

Définition

Une **fonction** f est un objet mathématiques qui associe à un nombre x, un unique autre nombre que l'on note $f(x)$ *(se lit : "f de x").*

Remarques : On peut voir une fonction comme une sorte de "*machine*" qui, lorsqu'on lui donne un nombre : x va ensuite nous en rendre un autre : $f(x)$.

$x \longrightarrow \boxed{\text{machine } f} \longrightarrow f(x)$ par exemple la "machine" racine carrée : $81 \longrightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \longrightarrow 9$

Exemples :

- Si on appelle f la fonction "au carrée", on pourra écrire comme notation : $f(x) = x^2$ et on aura : $f(4) = 4^2 = 16$; $f(-5) = (-5)^2 = 25$;...
- Si on appelle g la fonction "racine carrée", on pourra écrire comme notation : $g(x) = \sqrt{x}$ et on aura : $g(81) = 9$; $g(625) = \sqrt{625} = 25$; $g(-9)$ n'est par contre pas définie.
- Si on appelle h la fonction "sinus", on pourra écrire comme notation : $h(x) = \sin(x)$ et on aura : $h(30) = \sin(30) = 0,5$; $h(60) = \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$;...

Définition (Vocabulaire)**.**

Dans l'expression $f(x)$, on dit que x est la **variable** car on va être amené à choisir une valeur pour x et aussi à changer (faire *varier*) la valeur de x.

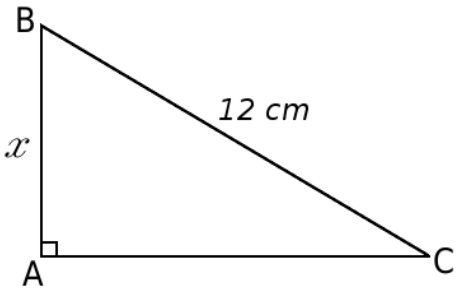
Exemples :

Dans tous les cas, lorsque l'on écrit, par exemple, $f(4)=16$, on dit que :
*16 est l'**image** de 4 par la fontion f* ou encore *4 est un **antécédent** de 16 par la fonction f*.
L'image est donc le résultat que donne la fonction quand on lui "donne" une valeur.

Remarque importante : J'attire l'attention du lecteur sur le fait que l'on dit bien "**l**'image" et non pas "**une** image" car pour tout nombre il n'y a qu'une seule image possible tandis que l'on dit "un antécédent" car il peut y en avoir plusieurs ! Par exemple, pour la fonction f définie précédemment ("au carrée"), 16 a deux antécédents possibles : 4 et -4.

Notation : On peut parfois voir aussi la notation : $f : x \mapsto x^2 - 3x$ (se lit : "La fonction f qui à x associe $x^2 - 3x$") qui a exactement la même signification que $f(x) = x^2 - 3x$.

Exemple plus complexe :



ABC est un triangle rectangle en A, on cherche à calculer la longueur du côté [AC] en fonction du nombre x, on notera cette longueur $f(x)$.

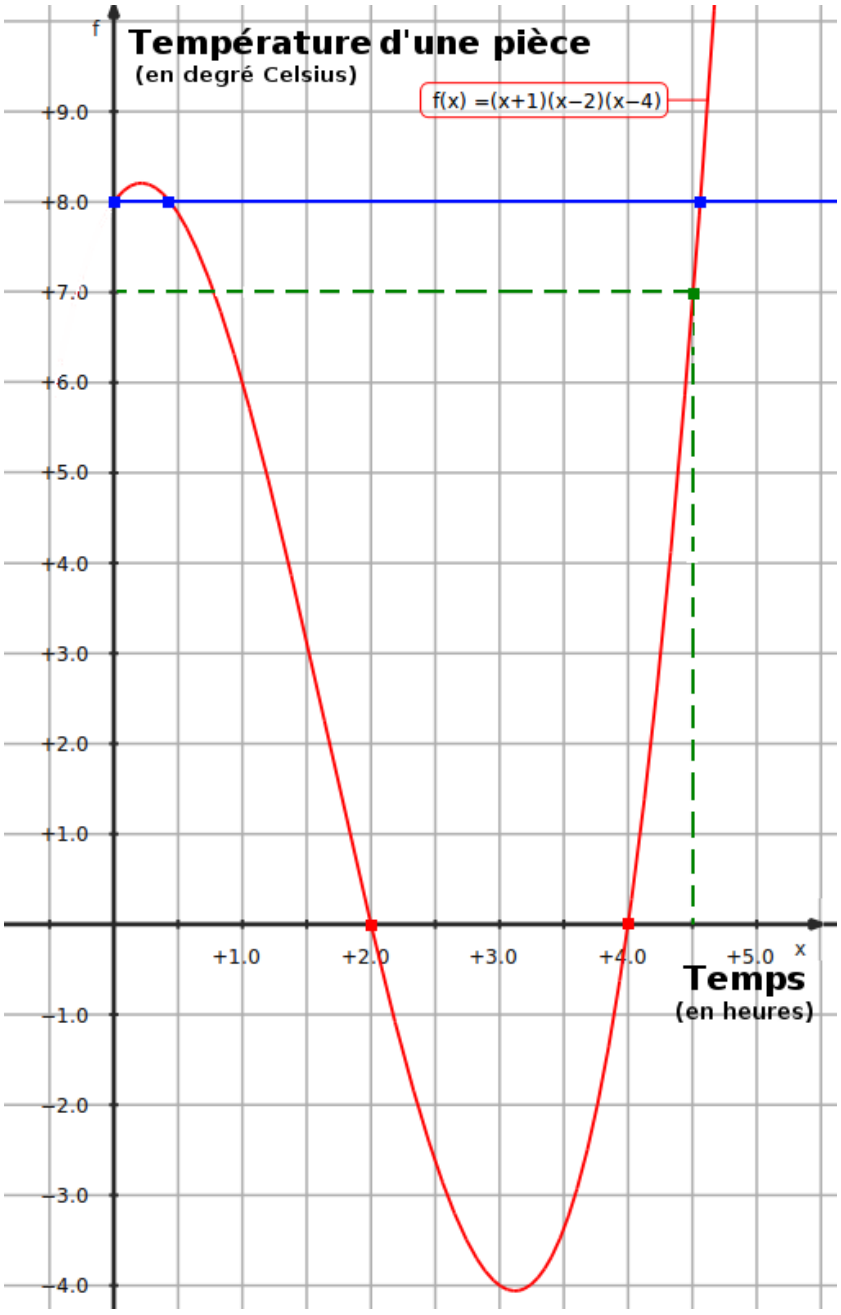
D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité : $BC^2 = AC^2 + AB^2$ soit en remplaçant : $12^2 = AC^2 + x^2$ donc :
$AC^2 = 144 - x^2$ et $AC = \sqrt{144 - x^2}$ et donc :

$$f(x) = \sqrt{144 - x^2}$$

.

2 Diverses représentations

2.1 Avec un graphique



La courbe en rouge est la courbe représentative d'une fonction f.

Sur l'axe des abscisses nous avons le temps (en heure) et sur l'axe des ordonnées la température d'une pièce (en degré Celsius). Nous dirons donc que le graphique ci-contre représente **la température d'une pièce en fonction du temps**.
La variable est ici le temps.

On peut remarquer que la pièce est à zéro degré à deux instants différents : au bout de la deuxième heure et au bout de la quatrième heure (points rouges).

L'image de 4,5 par cette fonction est 7, ce qui signifie qu'au bout de 4 heures et demie la température de la pièce est de 7 degrés (en vert).

On peut remarquer aussi que le nombre 8 admet trois antécédents par cette fonction f (en bleu sur la courbe), cela signifie que la pièce a été à 8 degrés à trois instants différents.

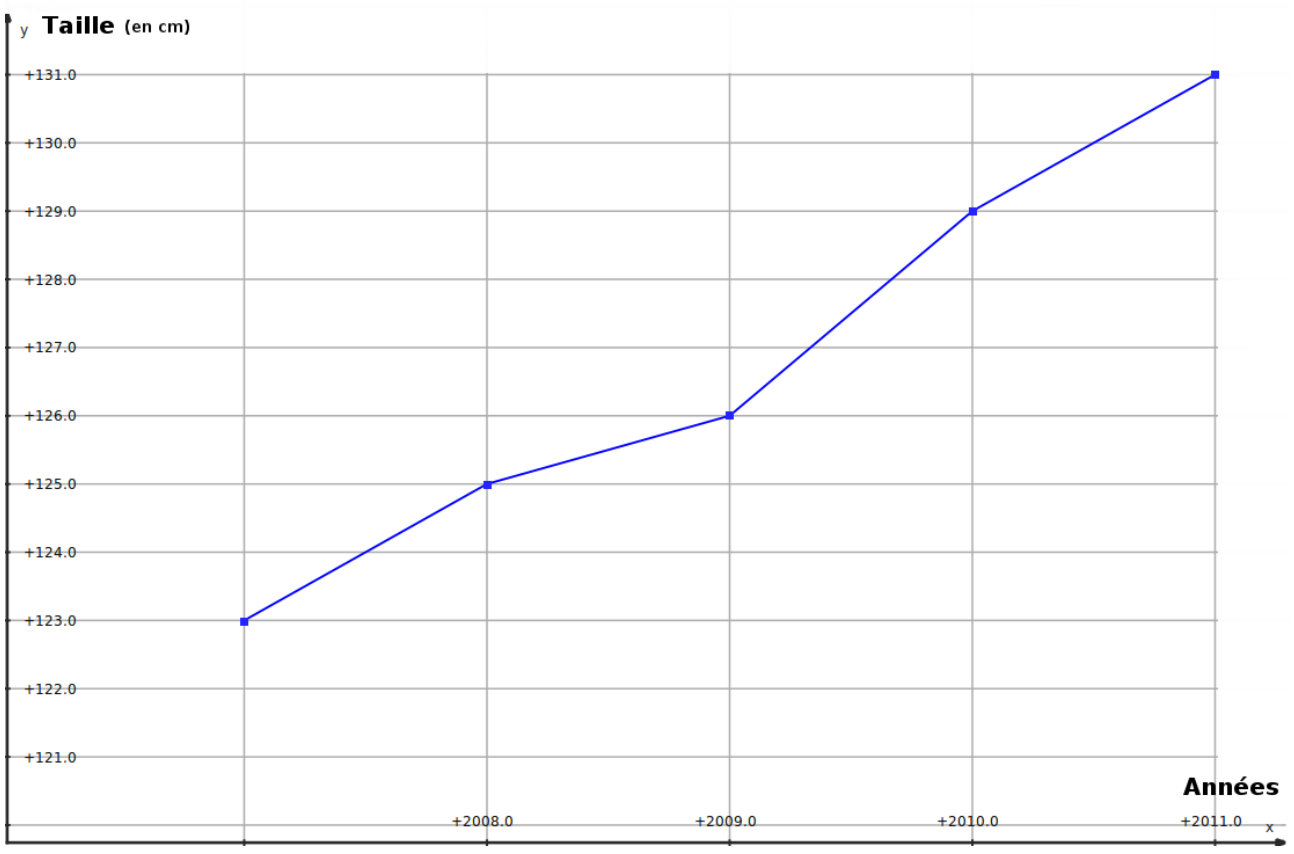
On peut se demander si le point A de coordonnées (1,5 ; 3) appartient à la courbe représentative de f, si cela est le cas alors l'image de 1,5 par la fonction f devrait être 3. Or $f(1,5) = (1,5+1)(1,5-2)(1,5-4) = 3,125$. Donc A n'appartient pas à la courbe représentative de la fonction f, mais il faudrait pouvoir zoomer pour le voir.

2.2 Avec un tableau

On peut aussi représenter une fonction à l'aide d'un tableau.

Années (**antécédents**)	2007	2008	2009	2010	2011
Taille de Zarakaï en cm (**images**)	123	125	126	129	131

Dans le tableau ci-dessus, on a la taille du nain Zarakaï en fonction des années. On peut alors faire une représentation graphique de la fonction "qui à l'année associe la taille en centimètre".



2.3 Avec une expression

Certaines fonctions peuvent s'exprimer directement à l'aide d'expressions, comme nous l'avons déjà vu plus haut, par exemple :

- $f(x) = x + 1$; l'image de 5 par f est alors 6 ; et l'image de 0 par f est 1.
- $g(y) = (y - 5)(y - 2)$; l'image de 5 par g est alors 0 ; et l'image de 0 par g est 10.
- $h(z) = \dfrac{\frac{2}{3}z^2 - 5z + 7}{\pi z + 5} - 2z^2 + \sqrt{5z^2 + 9}$; l'image de 0 par h est alors $\dfrac{7}{5} + 3 = 4,4$.

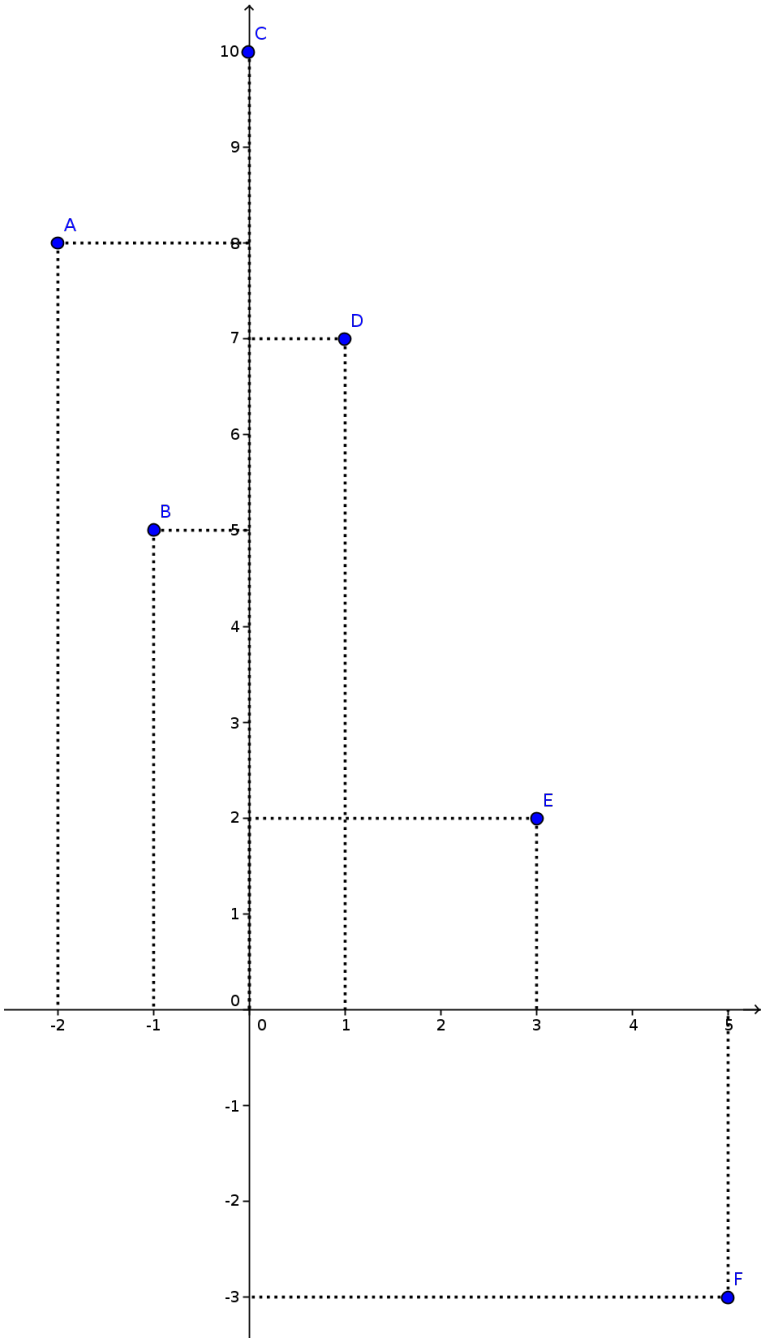
3 Construction d'un graphique

Remarque :
Si l'on connaît quelques valeurs d'une fonction (sous forme d'un tableau) ou si l'on connaît l'expression de cette fonction, on peut tenter de construire une représentation graphique **point par point**.

Exemple 1 : On connaît seulement quelques valeurs de la fonction.

x (antécédent)	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$ (images)	8	5	10	7	2	-3

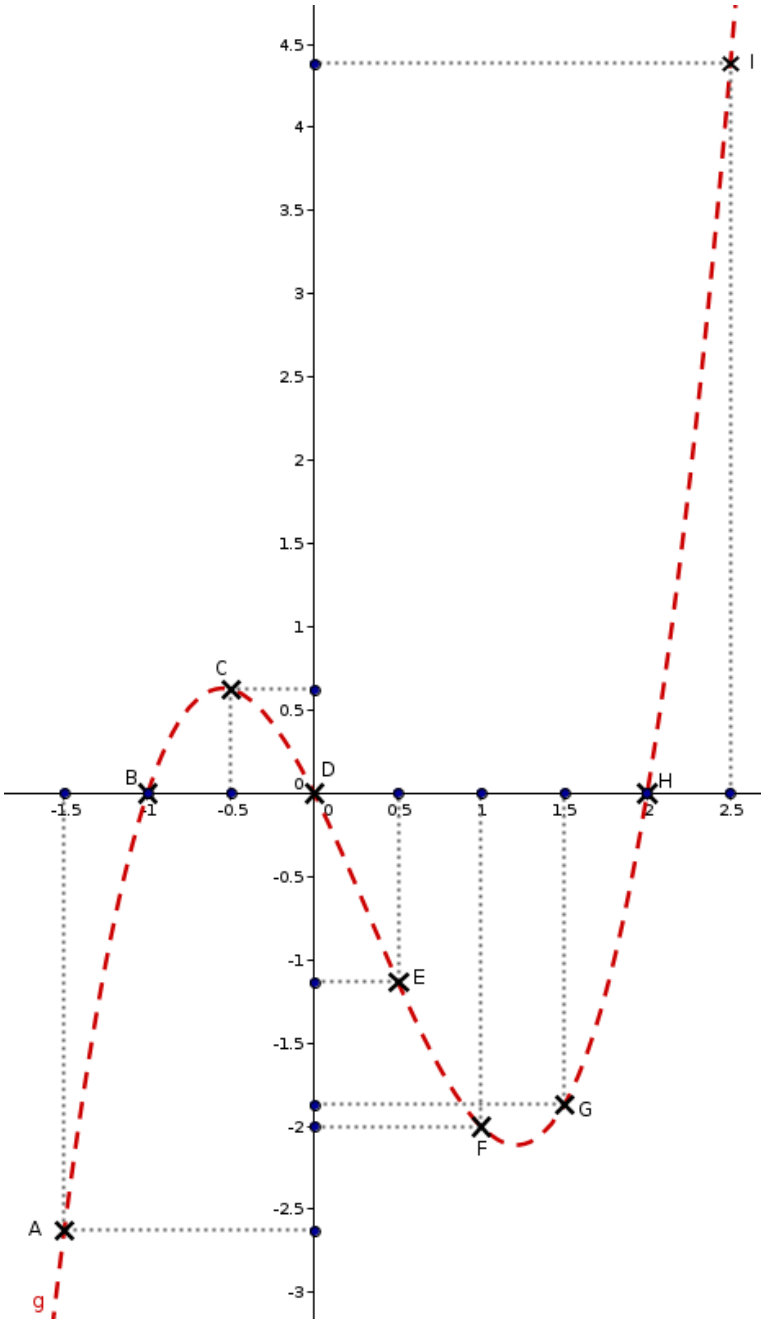
On construit alors pour chaque couple (antécédent ;image) un point dont les coordonnées (abscisse ;ordonnée) correspondent :



On sait maintenant que la courbe représentative de la fonction f passe par les points A, B, C, D, E et F mais on ne sait pas ce qu'il se passe entre ces points (la courbe représentative de f peut monter et descendre plusieurs fois entre A et B, ou pas). Pour cela il faut plus de points encore ou même mieux, il faut avoir l'expression de la fonction f.

Exemple 2 : On connaît l'expression de la fonction.

On cherche à construire une représentation de la fonction g dont l'expression est : $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$



On calcule plusieurs valeurs de la fonction g (autant que l'on veut, ici 9 valeurs).
Par exemple, l'image de $-1,5$ est :

$$\begin{aligned} g(-1,5) &= (-1,5)^3 - (-1,5)^2 - 2 \times (-1,5) \\ &= -3,375 - 2,25 + 3 \\ &= -2,625 \end{aligned}$$

Points	x (antécédents)	$g(x)$ (images)
A	$-1,5$	$-2,625$
B	-1	0
C	$-0,5$	$0,625$
D	0	0
E	$0,5$	$-1,125$
F	1	-2
G	$1,5$	$-1,875$
H	2	0
I	$2,5$	$4,375$

Plus on aura de valeurs plus on pourra avoir une idée précise de la courbe représentative de la fonctions g que l'on peut déjà envisager en pointillés rouge.